Examen partiel du 20 octobre 2012
Section A

durée : 3 heures
documents, calculettes, téléphones mobiles interdits

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la définition de la racine d'un polynôme. Donner la définition d'une racine triple.
2. Enoncer la formule de Moivre.
3. Après avoir rappelé les définitions du module et de l'argument d'un nombre complexe, déterminer module et argument de $z = (\sqrt{3} + i)^n$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$: $Z^2 + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$.

Exercice 3 On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = 0.$$

1. Chercher d'abord une solution imaginaire pure $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que
$$z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = (z-2i)\big(z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i\big).$$
3. Finalement calculer toutes les solutions de
$$z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = 0.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{i}{z}$.

1. Démontrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$, où $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est définie par $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}(z) = z$.
2. Calculer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
3. Soit $C_r = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon r. Calculer l'image directe par f du sous-ensemble C_r. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 5 Considérons l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

1. Rappeler les définitions d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.
2. Vérifier que l'application f ci-dessus est bien définie.
3. Etudier les variations de f et les résumer dans un tableau.
4. Calculer l'image directe $f(\mathbb{R}_+^*)$ de $\mathbb{R}_+^*$ par f. L'application f est-elle surjective (justifier votre réponse) ?
5. Calculer les images réciproques $f^{-1}(]0,1[)$ et $f^{-1}([2,4])$.
6. L'application f est-elle injective (justifier votre réponse) ?
7. On s'intéresse maintenant à l'application :

$$g : [1, +\infty[\to [2, +\infty[, \ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

Montrer que g est bien définie et qu'elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

Indication : observer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = 1 - z^7.$$

2. Soit w une solution quelconque de l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 0$. Vérifier que $1 + w^{2k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3$, puis que

$$w^7 = 1, \ \ w^8 = w, \ \ w^9 = w^2, \ \ w^{10} = w^3, \ \ w^{11} = w^4, \ \ w^{12} = w^5.$$

3. Notons encore w une solution quelconque de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\frac{w}{1 + w^2} + \frac{w^2}{1 + w^4} + \frac{w^3}{1 + w^6} = -2.$$

4. Déduire de la question précédente la valeur de

$$\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{6\pi}{7}}.$$

Indication : observer que

$$\frac{w}{1 + w^2} + \frac{w^2}{1 + w^4} + \frac{w^3}{1 + w^6} = \frac{1}{w + w^{-1}} + \frac{1}{w^2 + w^{-2}} + \frac{1}{w^3 + w^{-3}}.$$